leçons 236, 244, 245, 250, 261 -

développement : fonction caractéristique $\mathcal{C}(a,b)$

Si $Y \sim \mathcal{C}(a,b)$ alors $Y = bX + a$ avec $X \sim \mathcal{C}(0,1)$.

On peut alors se ramener à l'étude de loi de Cauchy $\mathcal{C}(0,1)$ et on en déduira le cas général de : $\phi_{bX+a} = \phi_X(bt)e^{ita}$.

Soit $X \sim \mathcal{C}(0,1)$. Soit $t > 0$.

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{itx}}{1+x^2}dx$$

Considérons l'application $f : \mathbb{C}\setminus\{\pm i\} \to \mathbb{C}$, $z \longmapsto \frac{e^{itz}}{1+z^2}$

et pour $R>0$ Γ_R le lacet obtenu par la concaténation des chemins $\gamma_{1,R} : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $t \longmapsto Re^{it}$ et $\gamma_{2,R} : [-R,R] \to \mathbb{C}$, $t \longmapsto t$ pour $R>1$.

voir schéma.

On fixe $R>1$.

. Par le théorème des résidus :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \mathrm{Res}(i,f)\underbrace{\mathrm{Ind}_{\Gamma}(i)}_{=1} + \mathrm{Res}(-i,f)\underbrace{\mathrm{Ind}_{\Gamma}(-i)}_{=0} = \mathrm{Res}(i,f)$$

Or i est d'ordre 1 donc :

$$\mathrm{Res}(i,f) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{e^{itz}}{z+i} = \frac{e^{-t}}{2i}$$

D'où : $\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = e^{-t}$ $\forall R>1$.

$$\cdot \left|\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi} f(e^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta\right| \leq \int_0^{\pi}\frac{|e^{itRe^{i\theta}}|}{|1+R^2e^{2i\theta}|}R\,d\theta \leq \int_0^{\pi} R\frac{e^{-Rt\sin\theta}}{R^2-1}d\theta$$

(*)

d'où $\left|\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow{R\to+\infty} 0$

. Pour $x\in\mathbb{R}$ $|f(x)| = \left|\frac{e^{itx}}{1+x^2}\right| = \frac{1}{1+x^2}$ qui est intégrable donc

$$\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx \xrightarrow{R\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

. Comme on a $\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz + \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz$ $\forall R>1$.

Par passage à la limite on obtient : $e^{-t} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}}{1+x^2}dx$ $\forall t>0$.

leçons 236, 244, 245, 250, 261

c'est à dire $\phi_X(t) = e^{-t}$ $\forall t > 0$.

. Or la loi de X est symétrique et $\phi_X(0) = 1$

donc $\phi_X(t) = e^{-|t|}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

(car $\phi_X(-t) = \overline{\phi_X(t)} = \phi_X(t)$)

. Pour $X \sim \mathcal{C}(a,b)$, on a donc : $\phi_X(t) = e^{ita} e^{-|bt|}$

⊛ Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}(bX+a \in B) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(bx+a) \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx$$

CDV $x = \frac{y-a}{b}$

$$= \int_{\mathbb{R}} \cancel{b} \, \mathbb{1}_B(y) \frac{1}{\cancel{b}} \times \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+\left(\frac{y-a}{b}\right)^2} dy$$

$$= \mathbb{P}(Y \in B)$$

d'où $Y = bX+a$)

* f° caract$^{\circ}$: bien déf + $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$. (thm $\int$ à par)

⊛ Par 2^e ineg Δ^r

$R^2 - 1 = |R^2 - 1| \leq |R^2 e^{2i\theta} - 1| = |R^2 e^{2i\theta} + 1|$

passer avec $\sqrt{\ }$ ici

+ régularité ? f° $\mathcal{C}^1_{pm}$ pas $\mathcal{C}^1$ → pas $\mathbb{E}$. de on sait dès le début